Über einige Ergebnisse aus der kombinatorischen Zahlentheorie

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 36, 1984, S.203-229

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über einige Ergebnisse aus der kombinatorischen Zahlentheorie

Erweiterte Fassung eines Vortrags,
der am 13.7.1984 in der Plenarversammlung der BWG gehalten wurde

Von **Hans-Joachim Kanold**, Braunschweig

Wir gehen von folgender Fragestellung aus: Gegeben sei eine positive ganze Zahl N durch eine kombinatorische Information, z.B. $N=n!$ als Anzahl der Permutationen von n Elementen oder $N=\binom{n}{k}$ als Anzahl der Kombinationen von k verschiedenen Elementen aus einer Grundmenge von n Elementen. Dann fragen wir nach der „Größenordnung" und der „Struktur" von N. Wir versuchen, einfache Vergleichsfunktionen zu finden, so daß der Quotient aus N und der Vergleichsfunktion beschränkt bleibt, eventuell sogar einem Grenzwert zustrebt. Wir beachten, daß N eindeutig in der sogenannten „kanonischen" Darstellung als Produkt von Primzahlpotenzen geschrieben werden kann:

(1) $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$.

Dabei sind $p_1, \dots, p_r$ Primzahlen ($p_1 < p_2 < \dots < p_r$) und $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ positive ganze Zahlen. Die „Struktur" von N wird beschrieben durch

(2) $\omega(N) = r$ = Anzahl der verschiedenen Primteiler von N, oder auch durch

(3) $\Omega(N) = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r$ = Anzahl der Primteiler von N, wobei jeder Primteiler gemäß seiner Vielfachheit in (1) gezählt wird. Wir beginnen mit der Diskussion der beiden Identitäten

(4) $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)n = \gamma_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$; $e = 2{,}71828\cdots$

und

(5) $\binom{2k}{k} = \dfrac{(2k)!}{k!k!} = c_k \cdot \dfrac{2^{2k}}{\sqrt{k}}$;

n und k bezeichnen natürliche Zahlen. Für die γ_n und c_k erhält man leicht

(6) $c_k\gamma_k{}^2 = \gamma_{2k}\sqrt{2}$; $\dfrac{c_{k+1}}{c_k} = \sqrt{1+\dfrac{1}{4k(k+1)}}$; $\dfrac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{k})^{k+0{,}5}}$;

$0{,}5 = c_1 < c_2 < \dots$

Die c_k, bzw. c_k^2 lassen sich nun sehr leicht und genau nach oben abschätzen. Weil $c_4^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48} < 0{,}3$ gilt, ist zunächst

(7) $\frac{1}{4} \leq c_k^2 < 0{,}3$; $\frac{1}{2} \leq c_k < 0{,}54773$ für $1 \leq k \leq 4$.

Es gilt weiterhin

(8) $c_k^2 < 0{,}318811 - \frac{1}{12{,}5k}$ für $k \geq 5$.

Damit ergibt sich

(9) $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = c^*$ existiert; $c^* < \sqrt{0{,}319} < 0{,}565$.

Nach (6) ist nun

(10) $$c_k\gamma_k = \frac{\gamma_{2k}}{\gamma_k} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{\gamma_{k+j}}{\gamma_{k-1+j}} = \sqrt{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{e}{(1+\frac{1}{k+j-1})^{k+j-0,5}}.$$

Beachten wir

(11) $(1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+0,5}$,

dann folgt

(12) $0 < \gamma_{k+1} < \gamma_k \leq \gamma_1 = e$; $\lim\limits_{k \to \infty} \gamma_k = \gamma^*$ existiert.

(13) $$c_k\gamma_k > \sqrt{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{1+\frac{1}{k+j-1})^{k+j-1}}{(1+\frac{1}{k+j-1})^{k+j-0,5}} = \sqrt{\frac{2}{\prod\limits_{j=1}^{k} (1+\frac{1}{k+j-1})}} = 1.$$

Somit ist $\gamma_k > \frac{1}{c_k} > \frac{1}{c^*} > \frac{1}{0{,}565}$, d. h. γ^* positiv.

Dann ergibt aber (6)

(14) $$c^*\gamma^* = \sqrt{2};\ \gamma^* = \frac{\sqrt{2}}{c^*} > \frac{\sqrt{2}}{0{,}565} > 2{,}503.$$

Mit Hilfe des Wallis'schen Produktes [1] ergibt sich genauer

(14') $$c^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564\cdots;\ \gamma^* = \sqrt{2\pi} = 2{,}506\cdots.$$

Es ist

(15) $$\omega(n!) = \pi(n) = \sum_{p \leq n} 1 = \text{der Anzahl der Primzahlen } p \leq n.$$

Um handliche Aussagen über $\omega(n!)$ zu gewinnen, definieren wir für alle reellen Zahlen x

(16) $$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1;\ \eta(x) = \eta_x = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 2; \\ \pi(x) \cdot x^{-1} \cdot \log x \text{ für } 2 \leq x. \end{cases}$$

Dabei ist mit log der natürliche Logarithmus zur Basis e gemeint. Nach (4) folgt

$$\gamma_n \cdot \left(\tfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}, \tag{17}$$

wenn wir mit p_i die i-te Primzahl (der Größe nach geordnet) bezeichnen. Wie leicht einzusehen ist, gilt

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right]; \; m_i = \left[\frac{\log n}{\log p_i}\right], \tag{18}$$

wobei das „eckige Klammersymbol" [x] die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet. Die Gleichungen (17) und (18) ergeben

$$\log\gamma_n + n(\log n-1) + \tfrac{1}{2}\log n = \sum_{i=1}^{\pi(n)} \log p_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right] = \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{n})} \log p_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right] + \sum_{i=\pi(\sqrt{n})+1}^{\pi(n)} \log p_i \left[\frac{n}{p_i}\right]. \tag{19}$$

Wir beachten

$$\pi(p_i) = i = \eta_{p_i} \cdot \frac{p_i}{\log p_i}; \; \log p_i = \eta_{p_i} \cdot \frac{p_i}{i}. \tag{20}$$

Das führt zu

$$\log\gamma_n + n(\log n-1) + \tfrac{1}{2}\log n = \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{n})} \eta_{p_i} \frac{p_i}{i} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right] + \sum_{i=\pi(\sqrt{n})+1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} \cdot p_i \cdot \left[\frac{n}{p_i}\right]. \tag{21}$$

Nun beweisen wir

Satz 1. *Für die in (16) definierte Funktion η_x gilt:*

a) Es gibt beliebig große Primzahlen p_i (p_i = i-te Primzahl) mit

$$\eta_{p_i} > 1 + \frac{1}{\log i} - \frac{1}{\log i \log\log i} > 1 + \frac{1}{\log p_i} - \frac{1}{\log p_i \log\log p_i};$$

b) es gibt beliebig große p_i mit

$$\eta_{p_i} < 1 + \frac{1}{\log i} + \frac{1}{\log i \log\log i}.$$

Das heißt im besonderen $\varliminf_{x\to\infty} \eta_x \leq 1 \leq \varlimsup_{x\to\infty} \eta_x$.

Beweis. Es ist

$$\sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right] < \frac{n}{p_i}\left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots\right) = \frac{n}{p_i-1}; \; \left[\frac{n}{p_i}\right] \leq \frac{n}{p_i} < \frac{n}{p_i-1}. \tag{22}$$

Also folgt nach (21) wegen $\log\gamma_n > \log\gamma^* > 0$

(23) $$\log n < 1 + \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} \cdot \frac{p_i}{p_i-1};$$

wir beachten

(24) $$\frac{\log p_i}{p_i-1} = \frac{\eta_{p_i}}{i} \cdot \frac{p_i}{p_i-1} = 2\eta_2 = \log 2 \text{ für } i = 1; \quad \frac{\eta_{p_i}}{i} \cdot \frac{p_i}{p_i-1} < \frac{p_i}{i-1} \text{ für } i > 1.$$

Das führt zu

(25) $$\log n < 1 + \log 2 + \sum_{i=2}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i-1}.$$

Nun machen wir die Annahme, es existiere eine natürliche Zahl n_0, so daß

(26) $$\eta_{p_i} \leq 1 + \frac{1}{\log i} - \frac{1}{\log i \log\log i}$$ für $i > \pi(n_0)$, also $p_i > n_0$ erfüllt ist. Dann ergibt (25)

(27) $$\log n < 1 + \log 2 + \sum_{i=2}^{\pi(n_0)} \frac{\eta_{p_i}}{i-1} + \sum_{i=\pi(n_0)+1}^{\pi(n)} \frac{1}{i-1}\left(1 + \frac{1}{\log i} - \frac{1}{\log i \log\log i}\right).$$

Es ist $1 + \log 2 + \sum_{i=2}^{\pi(n_0)} \frac{\eta_{p_i}}{i-1} = A_0$ eine (nur von n_0) abhängige Konstante. Wir beachten, daß

(28) $$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)$$ monoton fallend ist für $x \geq 5{,}1$.

Ferner, daß wir n_0 beliebig groß (aber dann festgehalten) wählen können. Für $\log(i-1) \geq 5{,}1$; $i-1 \geq \pi(n_0) \geq e^{5,1}$ haben wir

(29) $$\frac{1}{\log i}\left(1 - \frac{1}{\log\log i}\right) \leq \frac{1}{\log(i-1)}\left(1 - \frac{1}{\log\log(i-1)}\right)$$

und nach (27)

(30) $$\log n < A_0 + \sum_{i=\pi(n_0)+1}^{\pi(n)} \frac{1}{i-1}\left(1 + \frac{1}{\log(i-1)} - \frac{1}{\log(i-1)\log\log(i-1)}\right)$$

$$< A_0 + \log\pi(n) + \log\log\pi(n) - \log\log\log\pi(n).$$

Nun ist $\pi(n) = \eta_n \frac{n}{\log n}$; $\log\pi(n) = \log\eta_n + \log n - \log\log n$, $\log\log\pi(n) < \log\log n$, also $\log n < A_0 + \log\eta_n + \log n - \log\log\log\pi(n)$. Somit folgte

(31) $$\log\log\log\pi(n) < A_0 + \log\eta_n.$$

Nach (26) ist

$$\eta_{p_{\pi(n)}} \leq 1 + \frac{1}{\log\pi(n)} - \frac{1}{\log\pi(n)\log\log\pi(n)} < 2$$ und wegen

$$\pi(n) = \pi(p_{\pi(n)}) = \eta_n \frac{n}{\log n} = \eta_{p_{\pi(n)}} \frac{p_{\pi(n)}}{\log p_{\pi(n)}}$$

und $p_{\pi(n)} \leq n$ ist $\eta_n \leq \eta_{p_{\pi(n)}} < 2$.

Dann stellt aber (31) einen Widerspruch für sehr große n dar, weil bekanntlich $\pi(n) \to \infty$ gilt. Somit hat die Annahme (26) zum Widerspruch geführt. Die Behauptung a) ist bewiesen, wenn wir (28) beachten. Wir knüpfen jetzt bei (21) an. Für $p_i \leq \sqrt{n}$ haben wir $m_i \geq 2$ und

$\sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{n}{p_i^j}\right] \geq \left[\frac{n}{p_i}\right] + 1 > \frac{n}{p_i}$, also folgt aus (21)

$$1 + n(\log n - 1) + \frac{1}{2}\log n \geq \log\gamma_n + n(\log n - 1) + \frac{1}{2}\log n > \tag{32}$$

$$n \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{n})} \frac{\eta_{p_i}}{i} + n \sum_{i=\pi(\sqrt{n})+1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} \cdot \frac{p_i}{n}\left[\frac{n}{p_i}\right] \text{ oder}$$

$$\log n + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log n}{n} > 1 + \sum_{i=1}^{\pi(\sqrt{n})} \frac{\eta_{p_i}}{i} + \sum_{i=\pi(\sqrt{n})+1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i}\frac{p_i}{n}\left[\frac{n}{p_i}\right]. \tag{32'}$$

Sei, mit einer natürlichen Zahl s,

$$\frac{n}{s+1} < p_i \leq \frac{n}{s};\ \sqrt{n} < p_i \leq n;\ \sqrt{n} < \frac{n}{s};\ s < \sqrt{n};\ \frac{n}{s+1} < n;\ 1 \leq s < \sqrt{n}. \tag{33}$$

Dann folgt

$$\frac{p_i}{n}\left[\frac{n}{p_i}\right] > \frac{p_i}{n}\left(\frac{p_i}{n} - 1\right) = 1 - \frac{p_i}{n} \geq 1 - \frac{1}{s};\ \text{is} > s\pi\left(\frac{n}{s+1}\right); \tag{34}$$

Wir erhalten mit (32')

$$\log n > \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} - \sum_{s=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\eta_{p_i}}{s\pi\left(\frac{n}{s+1}\right)}; \tag{35}$$

nun ist $s\pi\left(\frac{n}{s+1}\right) = s\eta_{\frac{n}{s+1}} \cdot \frac{n}{(s+1)\log\frac{n}{s+1}} > \frac{1}{2}\eta_{\frac{n}{s+1}} \cdot \frac{n}{\log n}$;

$$\log n > \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} - \sum_{s=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{2\,\eta_{p_i}}{\eta_{\frac{n}{s+1}}} \cdot \frac{\log n}{n} > \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} - \frac{2\log n}{\sqrt{n}} \max \eta_{p_i}. \tag{36}$$

Weil nun $\max \eta_{p_i} < 2$ angenommen werden kann [2], gilt, bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$,

$$\log n > \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{\eta_{p_i}}{i} - \varepsilon \text{ für alle hinreichend großen } n. \tag{36'}$$

Nun machen wir die Annahme, es existiert n_0, so daß

(37) $$\eta_{p_i} \geq 1 + \frac{1}{\log i} + \frac{1}{\log i \log\log i} \text{ für } i > \pi(n_0),\ p_i > n_0 \text{ gilt.}$$

Wir haben damit

(38) $$\log n > \sum_{i=1}^{\pi(n_0)} \frac{\eta_{p_i}}{i} - \varepsilon + \sum_{i=\pi(n_0)+1}^{\pi(n)} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i\log i} + \frac{1}{i\log i\log\log i}\right)$$

$> \log\pi(n) + \log\log\pi(n) + \log\log\log\pi(n) - A_0$, wobei A_0 wiederum eine (nur von n_0) abhängige Konstante bedeutet. Wir sehen, daß

(39) $$\log\pi(n) > \log\eta_n + \log n - \log\log n$$
$$= \log n \cdot \left(1 - \frac{\log\log n}{\log n} + \frac{\log\eta_n}{\log n}\right) > \frac{1}{2}\log n,$$

$\log\pi(n) + \log\log\pi(n) > \log n + \log\eta_n - \log\log n + \log\log n - \log 2$ zu dem Widerspruch

(40) $$A_0 > \log\eta_n - \log 2 + \log\log\log\pi(n)$$

führt. Hiermit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Wenn also η_x konvergiert, folgt daraus der Primzahlsatz $\lim\limits_{x\to\infty} \eta_x = 1$. Das ist natürlich seit langem bekannt, jedoch scheint die Herleitung der hier auf ganz elementarem Wege bewiesenen Abschätzungen a) und b) von Satz 1 neu zu sein. Wir machen jetzt einige einfache Bemerkungen über η_x. Nach (20) ist

(41) $$\frac{\eta_{p_i}}{i} = \frac{\log p_i}{p_i} > \frac{\log p_{i+1}}{p_{i+1}} = \frac{\eta_{p_{i+1}}}{i+1} \text{ für } i > 1.$$

Wir haben weiterhin

(42) $$\eta_{p_i} \neq \eta_{p_j} \text{ für } i \neq j,$$

weil $\eta_{p_i} = \eta_{p_j}$ gleichbedeutend wäre mit $p_i^{ip_j} = p_j^{jp_i}$, was ersichtlich einen Widerspruch darstellt.

Wir bemerken zu (42), daß $\eta_{13} = \eta_{13^2}$ gilt. Sehr einfach zu zeigen ist

(43) Sei $i > 2$; $p_{i-1} \leq x < p_i$. Dann folgt
$$\eta_{p_i} - \frac{\log p_i}{p_i} < \eta_x \leq \eta_{p_{i-1}}.$$

Tragen wir die Funktion $\eta_x = \eta(x)$ über x auf, so besitzt η_x Sprungstellen an den Primzahlargumenten, und zwar springt η_x an der Stelle $x = p_i$ um den Betrag $\frac{\log p_i}{p_i}$ nach oben. Für $i \geq 4$ ist η_x im Intervall $5 \leq p_{i-1} < x < p_i$ stetig, monoton fallend und nach unten konvex. Sei $p_i - p_{i-1} = d$; $p_{i-1} = p$ zur Abkürzung bezeichnet. Es ist

(44) $\eta_{p_{i-1}} > \eta_{p_i}$, wenn $(i-1)\dfrac{\log p}{p} > i\,\dfrac{\log(p+d)}{p+d}$ gilt;

$\eta_{p_{i-1}} < \eta_{p_i}$, wenn $(i-1)\dfrac{\log p}{p} < i\,\dfrac{\log(p+d)}{p+d}$ gilt.

Wegen $(1+\frac{d}{p})^{\frac{p}{d}} < e < (1+\frac{d}{p})^{\frac{p}{d}+0,5}$ ist

(45) $$\log p + \frac{2d}{2p+d} < \log(p+d) < \log p + \frac{d}{p}.$$

Eine Diskussion von (45) und einige numerische Abschätzungen ergeben:

a) Es gilt $\eta_{p_{i-1}} < \eta_{p_i}$ für Primzahlzwillinge, also $p_i - p_{i-1} = 2$;

b) $\eta_{p_{i-1}} < \eta_{p_i}$, wenn $p_i - p_{i-1} \leq \log p_{i-1}$ und

(46) $$\eta_{p_{i-1}} \leq 1 + \frac{1}{\log p_{i-1}} + \frac{1}{(\log p_{i-1})^2};$$

c) $\eta_{p_{i-1}} > \eta_{p_i}$, wenn $p_i - p_{i-1} \geq \log p_{i-1}$ und $\eta_{p_{i-1}} \geq 1 + \dfrac{\log p_{i-1}}{p_{i-1}}$ erfüllt sind.

In der elementaren Analysis ist der folgende Satz für Konvergenzbeweise von Bedeutung: Jede unendliche, beschränkte, **monotone** Folge reeller Zahlen ist konvergent; für jede beschränkte, **monotone** Funktion f(x) existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Die Funktion η_x und verwandte Funktionen, welche wir noch später untersuchen wollen, sind zwar beschränkt, aber **nicht** monoton. Wir schränken deshalb die Monotonie in geeigneter Weise ein und beweisen einen Satz, der für sich ein gewisses Interesse beanspruchen darf.

Definition: Eine Funktion f(x) heiße eingeschränkt monoton (e.m.), wenn zu jedem $x \geq x_0$ ein $\xi = \xi(x)$ so existiert, daß für alle y mit $x < \xi \leq y$ gilt:

a) $f(x) \leq f(y)$ (e.m. wachsend = e.m.w.)
oder
b) $f(x) \geq f(y)$ (e.m. abnehmend = e.m.a.)

Eine unendliche reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots$ heiße eingeschränkt monoton (e.m.), wenn zu jedem $i \geq i_0$ ein Index $\xi = \xi(i)$ existiert, so daß für alle j mit $i < \xi \leq j$ gilt:

a) $a_i \leq a_j$ (e.m.w.) b) $a_i \geq a_j$ (e.m.a.)

Es gilt der leicht zu beweisende

Satz 2. *Jede unendliche, beschränkte, e.m. Folge ist konvergent; für jede beschränkte e.m. Funktion f(x) existiert* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Beweis. Sei $a_1, a_2, \dots$ eine unendliche Folge von reellen Zahlen, und es gelte mit einer endlichen Schranke S

(47) 1.) $a_i \leq S$ bzw. $a_i \geq S$ für $i = 1,2,3,\ldots$
2.) Zu jedem $i \geq i_0$ existiert $\xi = \xi(i)$, so daß $a_i \leq a_j$ bzw. $a_i \geq a_j$ für $\xi \leq j$ erfüllt ist.

Gäbe es nun $\underline{l} < \bar{l}$, so daß

(48) $$\underline{l} = \varliminf_{i \to \infty} a_i; \; \bar{l} = \varlimsup_{i \to \infty} a_i$$

gilt, dann gäbe es, mit $\bar{l} - \underline{l} = 3\varepsilon > 0$, beliebig große i mit $a_i < \underline{l} + \varepsilon$ und ebenso beliebig große j mit $\bar{l} - \varepsilon < a_j$.

Das widerspricht aber (47), 2.). Analog sei

(49) $$\underline{l} = \varliminf_{x \to \infty} f(x); \; \bar{l} = \varlimsup_{x \to \infty} f(x); \; \bar{l} - \underline{l} = 3\varepsilon > 0$$

angenommen. Es gäbe beliebig große x mit $f(x) < \underline{l} + \varepsilon$ und beliebig große y mit $\bar{l} - \varepsilon < f(y)$, im Widerspruch zur Definition.

(50) *Die Folge η_p, $p = 2,3,5,7,11,\ldots$, ist e.m.a.,*

was aber bisher nicht **elementar** bewiesen ist. Ein elementarer Beweis würde zugleich ein neuer elementarer Beweis des Primzahlsatzes sein.

Nach Rosser-Schoenfeld [3] folgt für alle Primzahlen $p > 53$

(51) $$1 + \frac{0,5}{\log p - 0,5} < \eta_p < 1 + \frac{1,5}{\log p - 1,5},$$

und daraus für $59 \leq p_i < p_j$ auch $\eta_{p_i} > \eta_{p_j}$, wenn $p_i^3 < p_j$ erfüllt ist.

Hiermit ist (50) gezeigt.

Ganz elementar läßt sich der folgende Satz beweisen.

Satz 3. *Sei $k = 1,2,3,\ldots$, und sei $a_k = \omega\left(\binom{2k}{k}\right) \frac{\log 2k}{2k}$ und $b_k = \omega\left(\frac{(30k)!\, k!}{(15k)!\,(10k)!\,(6k)!}\right) \frac{\log 30k}{30k}$, dann sind die Folgen a_k und b_k beide e.m.a. Es ist $\lim_{k \to \infty} a_k = \log\ 2 = 0,693\ldots$ und*

$b^* = \lim_{k \to \infty} b_k = \frac{1}{30} \log(2^{14}\, 3^9\, 5^5) = 0,921\ldots$ Genauer gelten die folgenden Abschätzungen

1.) $a_k > \log 2$ für $k \geq 6$; $a_k > \log 2 + \frac{\log 2k}{2k}$ für $k \geq 8$;

$$a_k < \frac{\log(2k) \cdot \log 2}{\log(2k) - \log\log(2k)} < \log 2 + \frac{\log\log(2k)}{\log(2k)} \text{ für } k \geq 200.$$

2.) $b_k > b^* + \frac{0,6}{(\log 30k)^2} > b^* + \frac{\log 30k}{30k}$ für $k \geq 30$; (vgl. (85))

$$b_k < b^* + 1{,}5\ \frac{\log\log 30k}{\log 30k} \text{ für } k \geq 20.$$

Beweis. Wir gehen aus von (5)

(52) $$\binom{2k}{k} = c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}} = \prod_{i=1}^{\omega} q_i^{\alpha_i}.$$

Dabei ist $\omega = \omega\left(\binom{2k}{k}\right)$; die Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_\omega$ genügen $q_1 < \ldots < q_\omega < 2k$ $(k > 1)$. Durch Logarithmieren wird

(53) $$\log c_k + 2k \log 2 - \frac{1}{2}\log k = \sum_{i=1}^{\omega} \alpha_i \log q_i.$$

Analog zu (18) ist

(54) $$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m_i}\left(\left[\frac{2k}{q_i^j}\right] - 2\left[\frac{k}{q_i^j}\right]\right); \quad m_i = \left[\frac{\log 2k}{\log q_i}\right].$$

Es ist leicht zu sehen, daß für $s \in \{0,1,2,\ldots\}$ gilt:

(55) Aus $\frac{2k}{2s+2} < q_i^j \leq \frac{2k}{2s+1}$ folgt $\left[\frac{2k}{q_i^j}\right] - 2\left[\frac{k}{q_i^j}\right] = 1$;

aus $\frac{2k}{2s+3} < q_i^j \leq \frac{2k}{2s+2}$ folgt $\left[\frac{2k}{q_i^j}\right] - 2\left[\frac{k}{q_i^j}\right] = 0$.

Wegen $\binom{2k}{k} = 2\binom{2k-1}{k-1}$ ist $2 \mid \binom{2k}{k}$, d.h.

(56) $$q_1 = 2.$$

Wir behaupten

(57) $$2 \leq 2^{\alpha_1} \leq \frac{4k}{3} \text{ für } k \geq 3.$$

Wäre $\frac{4k}{3} < 2^{\alpha_1}$; $\frac{2k}{3} < 2^{\alpha_1 - 1} \leq k$, so folgte wegen $k \geq 3$ auch $\alpha_1 \geq 3$ und

$$2 \leq \frac{2k}{2^{\alpha_1-1}} < 3; \quad \left[\frac{2k}{2^{\alpha_1-1}}\right] - 2\left[\frac{k}{2^{\alpha_1-1}}\right] \leq 0.$$

Das ergäbe den Widerspruch

$\frac{4k}{3} < 2^{\alpha_1} \leq 2^{\left[\frac{\log 2k}{\log 2}\right]-1} \leq k$. Nach (52), (56) und (57) erhalten wir mit (9)

(58) $$2 \cdot \prod_{i=2}^{\omega} q_i^{\alpha_i} \leq \frac{c_k}{\sqrt{k}} \cdot 2^{2k} \leq \frac{4k}{3} \prod_{i=2}^{\omega} q_i^{\alpha_i},$$

wobei die $q_i^{\alpha_i}$ Potenzen von ungeraden Primzahlen $< 2k$ sind.

Es wird daher

$$(59)\qquad \prod_{i=2}^{\omega} q_i^{\alpha_i} \leq (2k-1)\,(2k-3)\ldots = \prod_{j=1}^{\omega-1} (2k+1-2j) \leq (2k+1-\omega)^{\omega-1},$$

denn mit $P = \prod_{j=1}^{\omega-1} (2k+1-2j) = \prod_{j=1}^{\omega-1} (2k+1-2\omega+2j)$ folgt

$$P^2 = \prod \left\{(2k+1-\omega)^2 - (\omega-2j)^2\right\} \leq (2k+1-\omega)^{2(\omega-1)}.$$

Damit erhalten wir

$$(60)\qquad \log 2 + \frac{\log c_k - \frac{3}{2}\log k - \log\frac{4}{3}}{2k} \leq \frac{(\omega-1)\log(2k-(\omega-1))}{2k}.$$

Wir machen nun die Annahme

$$(61)\qquad \omega-1 \leq \frac{2k\log 2}{\log 2k}$$

und erhalten damit wegen $c_k \geq 0{,}5$

$$(62)\qquad \log 2 - \frac{1}{2k}\log\left(\frac{8}{3}k^{1,5}\right) \leq \frac{\log 2}{\log 2k}\log\left(2k\cdot\frac{\log k}{\log 2k}\right) =$$

$$= \log 2 - \frac{\log 2}{\log 2k}\log\frac{\log k + \log 2}{\log k}$$

oder

$$(62')\qquad \frac{2k\log 2}{\log 2k}\log\left(1+\frac{\log 2}{\log k}\right) \leq \log\left(\frac{8}{3}k^{1,5}\right).$$

Wegen $\left(1+\frac{\log 2}{\log k}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}+0,5} > e$ folgt $\log\left(1+\frac{\log 2}{\log k}\right) > \frac{2\log 2}{2\log k+\log 2}$.

Wegen $\frac{8}{3} < 2^{1,5}$ folgt $\log\left(\frac{8}{3}k^{1,5}\right) < 1{,}5\log 2$. Also führt (62') zu

$$(63)\qquad \frac{2k}{\log 2k}\cdot\log 2\cdot\frac{2\log 2}{2\log k+\log 2} < 1{,}5\log 2k;$$

nun ist $\frac{2(\log 2)^2}{2\log k+\log 2} > \frac{(\log 2)^2}{\log 2k}$, d.h.

$$(63')\qquad \frac{2k(\log 2)^2}{(\log 2k)^3} = \left(\frac{(2k)^{\frac{1}{3}}}{3\log(2k)^{\frac{1}{3}}}\right)^3 (\log 2)^2 < 1{,}5.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist monoton wachsend, wenn $2k > 21 > e^3$ gilt; $(\log 2)^2 > 0{,}48$ ergibt

$$(64)\qquad \frac{2k}{(\log 2k)^3} < 3{,}125.$$

Für $k \geq 540$ folgt der Widerspruch $1080 < 3{,}125\,(\log 1080)^3 < 7^3\cdot 3{,}125 < 1072$.

Mit Hilfe einer Primzahltabelle und mit genaueren numerischen Abschätzungen von (58) und (59) folgt schließlich:

(65) Für $k \geq 8$ gilt $a_k > \log 2 + \frac{\log 2k}{2k}$; für $k \geq 6$ gilt $a_k > \log 2$.

Hieraus ergibt sich unmittelbar: Für $n \geq 3$ ist $\eta_n \geq \log 2$. Wir wollen nun in der anderen Richtung abschätzen. Nach (14') bzw. (9) und (52) haben wir

$$\frac{c_k\, 2^{2k}}{\sqrt{k}} = \prod_{i=1}^{\omega} q_i^{\alpha_i} < \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} \text{ bzw. } \prod_{i=1}^{\omega} q_i^{\alpha_i} < \frac{0{,}565 \cdot 2^{2k}}{\sqrt{k}}. \tag{66}$$

Wir beweisen zunächst den einfachen

Hilfssatz. *Sei a eine natürliche Zahl ≥ 7. Dann liegen in der Sequenz $a+1$, $a+2, \ldots, a+30$ höchstens 7 Primzahlen; sind $p_1, p_2 \ldots$ die der Größe nach geordneten Primzahlen, dann gilt $p_i \geq 4i+3$ für $i \geq 31$.*

Wir beachten $\varphi(30)=8$ (φ = Eulersche φ-Funktion). Zu jeder Sequenz von 30 Zahlen sind also genau 8 zu $2\cdot 3\cdot 5$ teilerfremd; sie liegen in den folgenden Restklassen (mod 30): 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Unter diesen Zahlen ist aber mindestens eine durch 7 teilbar. Es ist $p_{30} = 113 < 4\cdot 30$, aber $p_{31} = 127 = 4\cdot 31+3$ und, wie leicht nachprüfbar,

$$p_{30+i} \geq 4\,(30+i)+3 \text{ mit } i=1,2,\ldots,7. \tag{67}$$

Nun machen wir die Annahme, es sei $p_{30+i+7t} \geq 4\,(30+i+7t)+3$ mit $i=1,\ldots,7$ und $t \in \{0,1,2,\ldots\}$. Wäre dann $p_{30+i+7t+7} < 4\,(30+i+7t+7)+3$, so wäre, mit $a=4\,(30+i+7t)+2$, $a+1 \leq p_{30+i+7t} < \ldots < p_{30+i+7t+7} \leq a+28$, also enthielte die Sequenz $a+1,\ldots,a+28$ mit $a>120$ mindestens 8 Primzahlen, im Widerspruch zu dem obigen Resultat. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Für $\omega \geq 31$ erhalten wir aus (66)

$$\frac{0{,}565 \cdot 2^{2k}}{\sqrt{k}} > p_1 \ldots p_{30} \prod_{i=31}^{\omega} (4i+3) \tag{68}$$

oder

$$2k\log 2 > \frac{1}{2}\log k + \log\frac{10}{5{,}65} + \sum_{i=1}^{30} \log p_i + (\omega-30)\log 4 \tag{68'}$$

$$+\log\omega! - \log 30! + \sum_{i=31}^{\omega} \log\left(1+\frac{3}{4i}\right).$$

Beachten wir $\log\left(1+\frac{3}{4i}\right) > \frac{1}{\frac{4}{3}i+0{,}5} = \frac{6}{8i+3} > \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{i+1}$,

dann folgt mit (4)

$$(69)\qquad 2k\log 2 > \frac{1}{2}\log(3k) + \sum_{i=1}^{30}\log p_i + (\omega-30)\,2\log 2 + \omega(\log\omega - 1)$$

$$+\frac{1}{2}\log\omega + \log\frac{\gamma_\omega}{\gamma_{30}} - 30\log 30 + 30 - \frac{1}{2}\log 30 + \frac{3}{4}(\log\omega - \log 32).$$

Wir machen jetzt die Annahme

$$(70)\qquad \omega \geq \frac{2k\log 2}{\log 2k - \log\log 2k}, \text{ d.h. } \omega\log\omega > 2k\log 2 + \frac{2k\log 2\cdot\log\log 2}{\log 2k - \log\log 2k}.$$

Es ist dann $\omega\log\omega + \omega(2\log 2 - 1) > 2k\log 2 + \frac{2k\log 2}{\log 2k - \log\log 2k}\cdot(\log\log 2 + \log 4 - 1)$; $\log\log 2 + \log 4 - 1 = \log\frac{4\log 2}{e} > \log 1{,}019 > 0{,}0178.$

Damit wird aus (69)

$$(71)\qquad 0 > \frac{1}{2}\log(3k) + \sum_{i=1}^{30}\log p_i + \frac{2k\log 2}{\log 2k - \log\log 2k}\,0{,}0178 - 60\log 2$$

$$+\frac{5}{4}\log\omega + \log\frac{2{,}5}{e} - 30{,}5\log 30 + 30 - \frac{3}{4}\log 2^5 \text{ oder}$$

$$(71')\qquad 1 + 63{,}75\cdot\log 2 + 30{,}5\cdot\log 30 - 30 - \log 2{,}5 - \sum_{i=1}^{30}\log p_i >$$

$$\frac{1}{2}\log(3k) + 0{,}0178\cdot\frac{2k\log 2}{\log 2k - \log\log 2k} + 1{,}25\cdot(\log 2k - \log\log 2k).$$

Die linke Seite ist konstant, während die rechte mit $k\to\infty$ für $k\geq 3$ monoton wachsend über alle Grenzen strebt. Also existiert k_0, so daß für $k\geq k_0$ die Annahme (70) zum Widerspruch führt. Das ergibt mit (65), daß a_k e.m.a. ist. Wir wollen k_0 näher bestimmen. Wir ermitteln rechnerisch

$$(72)\qquad 10{,}941 > 0{,}5\log 3k + 0{,}01233\cdot\frac{2k}{\log 2k - \log\log 2k} +$$

$$+1{,}25\cdot\log 2k\cdot\left(1 - \frac{\log\log 2k}{\log 2k}\right).$$

Hieraus erhalten wir für k_0 zunächst die Schranke 600, welche wir aber durch genauere rechnerische Abschätzung von (66) auf $k_0 = 200$ verbessern können. Es ist also

$$(73)\qquad \omega < \frac{2k\log 2}{\log 2k - \log\log 2k};\quad a_k < \frac{\log(2k)\cdot\log 2}{\log(2k) - \log\log(2k)} < \log 2 + \frac{\log\log(2k)}{\log(2k)}$$

für $k\geq 200$.

Für $k_1 < k_2$ folgt

$$a_{k_1} > \log 2 + \frac{\log 2k_1}{2k_1} \geq \log 2 + \frac{\log\log 2k_2}{\log 2k_2} > a_{k_2}, \text{ wenn } \frac{\log 2k_1}{2k_1} \geq \frac{\log\log 2k_2}{\log 2k_2}$$

gilt, was für $2k_2 \geq e^{2k_1}$ zutrifft. Damit sind alle Behauptungen von Satz 3 über die Folge a_k bewiesen. Wir untersuchen nun die Folge b_k, wobei wir die Ergebnisse von [4] z.T. verbessern wollen.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\frac{(30k)!\,k!}{(15k)!\,(10k)!\,(6k)!} = A_k; \ \frac{1}{30} \log(2^{14}\, 3^9\, 5^5) = b^*; \ \omega(A_k) = \omega. \tag{74}$$

Wir können schreiben

$$\prod_{i=1}^{\omega} p_i \leq A_k = \prod_{i=1}^{\omega} q_i^{\alpha_i}, \tag{75}$$

wobei p_i wieder die i-te Primzahl sein soll; für die Primzahlen q_i gilt $q_1 < \ldots q_\omega < 30k$. Da, wie früher gezeigt [4], auch $q_i^{\alpha_i} < 30k$ angenommen werden kann, haben wir auch

$$A_k \leq (30k-2) \prod_{i=1}^{\omega-1} (30k+1-2i).$$ Analog zu (59) haben wir

$$A_k \leq (30k-2) \cdot (30k+1-\omega)^{\omega-1}. \tag{76}$$

In der anderen Richtung können wir wieder

$$A_k \geq \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{\omega} p_i & \text{für } \omega \leq 30 \\ \prod\limits_{i=1}^{30} p_i \prod\limits_{i=31}^{\omega} (4i+3) & \text{für } \omega > 30 \end{cases} \tag{76'}$$

abschätzen. Da

$$A_k = \frac{\gamma_{30k}\,\gamma_k}{\gamma_{15k}\,\gamma_{10k}\,\gamma_{6k}} \frac{e^{30kb^*}}{\sqrt{30k}} \text{ gilt, und} \tag{77}$$

$$0{,}338 < \frac{2{,}5}{e^2} < \frac{\gamma_{30k}}{\gamma_{15k}\,\gamma_{10k}} < \frac{\gamma_{30k}\,\gamma_k}{\gamma_{15k}\,\gamma_{10k}\,\gamma_{6k}} < \frac{\gamma_k}{\gamma_{10k}\,\gamma_{6k}} < \frac{e}{2{,}5^2} < 0{,}44 \tag{78}$$

oder

$$-1{,}09 < \log 2{,}5 - 2 < \log \frac{\gamma_{30k}\,\gamma_k}{\gamma_{15k}\,\gamma_{10k}\,\gamma_{6k}} < 1 - 2\log 2{,}5 < -0{,}83 \tag{78'}$$

erfüllt sind, haben wir

$$30kb^* - 0{,}5\,\log 30k - 1{,}09 < \log A_k < 30kb^* - 0{,}5\,\log 30k - 0{,}83. \tag{79}$$

Wir diskutieren nun zuerst

(80) $$30kb^* - 0{,}5 \log 30k - 1{,}09 < \log(30k-2) + (\omega-1)\log(30k-(\omega-1)).$$

Wir berücksichtigen wieder

$$\log(30k-(\omega-1)) = \log 30k - \log\left(1+\frac{\omega-1}{30k-\omega-1}\right) < \log 30k - \frac{1}{\frac{30k}{\omega-1}-0{,}5};$$

$$\log(30k-2) = \log 30k - \log\left(1+\frac{1}{15k-1}\right) < \log 30k - \frac{1}{15k-0{,}5}$$ und erhalten

(81) $$30kb^* - 0{,}5 \log 30k - 1{,}09 < \log 30k - \frac{1}{15k-0{,}5} + (\omega-1)\left(\log 30k - \frac{1}{\frac{30k}{\omega-1}-0{,}5}\right)$$

oder

$$b^* - 1{,}5\,\frac{\log 30k}{30k} - \frac{1{,}09}{30k} < \frac{\omega-1}{30k}\left(\log 30k - \frac{\omega-1}{30k-0{,}5(\omega-1)}\right).$$

Für $k \geq 14$ ist die rechte Seite dieser Ungleichung eine monoton wachsende Funktion von ω (bei festgehaltenem k).

Jetzt machen wir die Annahmen

(82) $$k \geq 14 \text{ und } b_k \leq b^* + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^2}$$

mit einem noch näher zu bestimmenden ϑ. Dann folgt

$$\omega = b_k\,\frac{30k}{\log 30k} \leq b^* \cdot \frac{30k}{\log 30k} + \frac{\vartheta \cdot 30k}{(\log 30k)^3}.$$ In (81) eingesetzt, ergibt das

$$b^* - 1{,}5\,\frac{\log 30k}{30k} - \frac{1{,}09}{30k} < \left(\frac{b^*}{\log 30k} + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^3} - \frac{1}{30k}\right)\left(\log 30k - \frac{b^*}{\log 30k} - \frac{\vartheta}{(\log 30k)^3} + \frac{1}{30k}\right)$$

$$= b^* + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^2} - \frac{\log 30k}{30k} - \left(\frac{b^*}{\log 30k} + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^3} - \frac{1}{30k}\right)^2$$ oder

(83) $$\left(\frac{b^*}{\log 30k} + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^3} - \frac{1}{30k}\right)^2 < 0{,}5\,\frac{\log 30k}{30k} + \frac{1{,}09}{30k} + \frac{\vartheta}{(\log 30k)^2}.$$

Es folgt nun aus (82) ein Widerspruch, wenn

(84) a) $\dfrac{\vartheta}{(\log 30k)^3} \geq \dfrac{1}{30k}$; $\dfrac{30k}{(\log 30k)^3} \geq \dfrac{1}{\vartheta}$ und

b) $\dfrac{(b^{*2}-\vartheta)}{(\log 30k)^3} \geq 0{,}5\,\dfrac{\log 30k}{30k} + \dfrac{1{,}09}{30k}$ oder

$$\frac{30k}{(\log 30k)^3} \geq \frac{0{,}5 + \frac{1{,}09}{\log 30k}}{b^{*2} - \vartheta}$$

erfüllt sind. Wir erhalten die Ergebnisse:

(85) Aus $k \geq 20$ folgt $b_k > b^* + \frac{0,5}{(\log 30k)^2}$;

aus $k \geq 30$ folgt $b_k > b^* + \frac{0,6}{(\log 30k)^2}$;

aus $k \geq 50$ folgt $b_k > b^* + \frac{0,67}{(\log 30k)^2}$.

Nun diskutieren wir

(86) $$30kb^* - 0,5 \log 30k - 0,83 > \begin{cases} \sum_{i=1}^{\omega} \log p_i & \text{für } \omega \leq 30; \\ \sum_{i=1}^{30} \log p_i + \sum_{i=31}^{\omega} \log(4i+3) & \text{für } \omega > 30. \end{cases}$$

Da nach (85) aus $k \geq 20$ auch $\omega > 0,921 \cdot \frac{600}{\log 600} > \frac{0,921 \cdot 600}{6,4} > 86$ folgt,

setzen wir $k \geq 20$ und $\omega \geq 87$ voraus und diskutieren

(86') $$30kb^* > 0,83 + 0,5 \log 30k + \sum_{i=1}^{30} \log p_i + \sum_{i=31}^{\omega} \log 4 + \sum_{i=31}^{\omega} \log i + \\ + \sum_{i=31}^{\omega} \log\left(1 + \frac{3}{4i}\right).$$

Wegen $\sum_{i=1}^{30} \log p_i \geq 107,069$ haben wir

$$30kb^* > 107,899 + 0,5 \log 30k + (\omega - 30) \log 4 + \log \omega! - \log 30! \\ + \sum_{i=31}^{\omega} \log\left(1 + \frac{3}{4i}\right).$$

Nun ist $\log \omega! = \log \gamma_\omega + \omega(\log \omega - 1) + 0,5 \log \omega$;

$\log 30! = \log \gamma_{30} + 30(\log 30 - 1) + 0,5 \log 30$;

$$\log\left(1 + \frac{3}{4i}\right) > \frac{1}{\frac{4i}{3} + 0,5} = \frac{6}{8i+3}; \quad \sum_{i=31}^{\omega} \frac{6}{8i+3} > \frac{3}{4} \sum_{i=31}^{\omega} \frac{1}{i+1} > \frac{3}{4} \log \omega - \frac{15}{4} \log 2;$$

$\log \gamma_\omega - \log \gamma_{30} > 0,916 - 1 = -0,084$; $30 \log 4 < 41,589$.

Wir erhalten schließlich

(87) $$30kb^* > 0,5 \log 30k + 1,25 \log \omega + \omega \log \omega + \omega(\log 4 - 1) - 10,111.$$

Wir machen die Annahme

(88) $$b_k > b^* + 1,5 \frac{\log\log 30k}{\log 30k}, \text{ also } \omega \geq \left(b^* + 1,5 \frac{\log\log 30k}{\log 30k}\right) \frac{30k}{\log 30k}.$$

Aus (87) und (88) erhalten wir

(89) $$30kb^* > 0{,}5\ \log 30k - 10{,}111 + \left(b^* + 1{,}5\ \frac{\log\log 30k}{\log 30k}\right) \frac{30k}{\log 30k}\ (\log 4 - 1)$$
$$+ \frac{30k}{\log 30k}\left(b^* + 1{,}5\ \frac{\log\log 30k}{\log 30k}\right) (\log b_k + \log 30k - \log\log 30k).$$

Das Produkt der beiden letzten Klammern ergibt

$$b^* \log 30k + (1{,}5 - b^*)\ \log\log 30k + \left(b^* + 1{,}5 \frac{\log\log 30k}{\log 30k}\right) \log b_k - 1{,}5\ \frac{(\log\log 30k)^2}{\log 30k}$$
$> b^* \log 30k$, wenn

(90) $$(1{,}5 - b^*)\ \log\log 30k > (1{,}5 - 0{,}93)\ \log\log 600 > 0{,}57\ \log 6{,}39 > 1$$
$$> \log \frac{1}{0{,}92}\left(0{,}93 + 1{,}5\ \frac{\log\log 600}{\log 600}\right) + 1{,}5\ \frac{(\log\log 600)^2}{\log 600}\ \text{gilt.}$$

Das ist aber der Fall. Wir können für $k \geq 20$ statt (89) diskutieren

(91) $$0 > 0{,}5\ \log 30k - 10{,}111 + 0{,}92 \cdot 0{,}386\ \frac{600}{\log 600}\ \text{oder}$$
$$10{,}111 > 0{,}5\ \log 600 + \frac{0{,}92 \cdot 0{,}386 \cdot 600}{\log 600}.$$ Das ergibt einen Widerspruch.

(92) Aus $k \geq 20$ folgt also $b_k < b^* + 1{,}5\ \dfrac{\log\log 30k}{\log 30k}$.

Es ist für $30 \leq k_1 < k_2$ auch

$$b_{k_1} > b^* + \frac{0{,}6}{(\log 30k_1)^2} \geq b^* + 1{,}5\ \frac{\log\log 30k_2}{\log 30k_2} > b_{k_2},\ \text{wenn}$$

$$\frac{0{,}6}{(\log 30k_1)^2} \geq \frac{1{,}5\ \log\log 30k_2}{\log 30k_2}\ \text{erfüllt ist.}$$

Für $30k_2 \geq e^{60k_1}$ ist aber

$$\frac{\log 30k_2}{\log\log 30k_2} \geq \frac{60k_1}{\log 60k_1} = 2\ \frac{30k_1}{\log 30k_1 + \log 2} > \frac{5}{3}\ (\log 30k_1)^2.$$

Also ist b_k e.m.a. und hiermit Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir wollen einige Folgerungen für η_x ziehen. Wir haben gesehen, daß

(i) $n \geq 3 \Rightarrow \eta_n \geq \log 2$.

(ii) $k \geq 50 \Rightarrow b_k > b^* + \dfrac{0{,}67}{(\log 30k)^2}$.

Es ist also

(93) $$\eta_{30k} \geq b_k > b^* + \frac{0{,}67}{(\log 30k)^2}\ \text{für}\ k \geq 50.$$

Sei $30k \leq x \leq 30k + 30$, x reell.

Es ist, mit ganzen Zahlen r,s und $0 \leq r \leq s < 7$

$\pi(30k)+r=\pi(x)$;
$\pi(30k)+s=\pi(30k+30)$.

$r=s$ ergibt sofort $\eta_x \geq \eta_{30k+30} > b^*$ für $x \geq 1500$.

$r<s$ ergibt $x \leq 30k+29$; $\eta_x \geq \eta_{30k} \cdot \frac{30k}{30k+29} > \left(b^* + \frac{0{,}67}{(\log 30k)^2}\right) \frac{30k}{30k+29}$

für $k \geq 50$.

Es ist also für $x \geq 1500$ auch $\eta_x > b^*$, wenn

$b^* - \frac{29}{30k+29}\, b^* + \frac{0{,}67}{(\log 30k)^2}\left(1 - \frac{29}{30k+29}\right) > b^*$, also

$\frac{0{,}67}{(\log 30k)^2}\left(1 - \frac{29}{30k+29}\right) \geq \frac{29\, b^*}{30k+29}$ oder $0{,}67\left(1 - \frac{1}{\frac{30k}{29}+1}\right) \geq \frac{b^*(\log 30k)^2}{\frac{30k}{29}+1}$;

$\frac{0{,}67 \cdot 30k}{29} \geq b^*(\log 30k)^2$ gilt. Numerische Abschätzungen ergeben:

Für $x \geq 2460$ gilt $\eta_x > b^* = 0{,}921292\ldots$

$11 \leq x < 13 \Rightarrow \eta_x > 5 \cdot \frac{\log 13}{13} > 0{,}98$;

$13 \leq x < 17 \Rightarrow \eta_x > 6 \cdot \frac{\log 17}{17} > 0{,}99$;

$17 \leq x < 19 \Rightarrow \eta_x > 7 \cdot \frac{\log 19}{19} > 1$;

$19 \leq x < 23 \Rightarrow \eta_x > 8 \cdot \frac{\log 23}{23} > 1$ und weiterhin:

Für $11 \leq x < 2460$ gilt $\eta_x > 0{,}98$.

Also ist elementar gezeigt:

(94) $x \geq 11 \Rightarrow \eta_x > b^*$. Für $p \geq 5$ gilt $\eta_p > b^*$.

Beachten wir (42) und (43), dann ergibt ein früheres Resultat [4]

(95) *$\eta_x < \eta_{113} < 1{,}255059$ für alle reellen $x \neq 113$.*

Wir definieren, unter Verwendung von (2), eine zahlentheoretische Funktion $W(n)=W_n$ durch

(96) $$W(n)=W_n=\begin{cases} 0 & \text{für } n=1,2; \\ \omega(n)\,\dfrac{\log\log n}{\log n} & \text{für } n=3,4,5,\ldots \end{cases}$$

und beweisen elementar

Satz 4. *Es ist* $\overline{\lim}_{n\to\infty} W_n = 1$; $\overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,3,\dots} W_n = W(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23) < 1{,}3842$. $(1{,}3835 < W(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 23) < 1{,}3842)$.

Beweis. Ist $\omega(n) = r$, dann folgt, wenn wir wieder mit $p_1, p_2, \dots$ die der Größe nach geordneten Primzahlen bezeichnen, sofort

(97) $$\omega(n) = \omega(p_1 p_2 \dots p_r);\ W(n) = r\,\frac{\log\log n}{\log n};$$

$$W(p_1 \dots p_r) = r\,\frac{\log\log p_1 \dots p_r}{\log p_1 \dots p_r} \text{ für } r > 1;$$

$$W(n) = \frac{\log\log q_1^{\alpha_1}}{\log q_1^{\alpha_1}};\ W(2) = 0.$$

Es ist also im Fall $r = 1$ entweder $n = 2$ und $W(2) = 0$ oder $n \geq 3$ und $W(n) > W(2) = 0$. Wir beachten jetzt, daß $\frac{\log\log x}{\log x}$ monoton abnehmend ist für $x \geq 16 > e^e$ und monoton wachsend für $e \leq x < e^e$. Wir haben damit

(98) $$W(2) = 0 \leq W(n) < \frac{1}{e} \text{ für } r = 1;$$

$$0 < W(2\cdot 3) = 2\,\frac{\log\log 6}{\log 6};\ W(n) < \frac{2}{e} \text{ für } r = 2;$$

$$W(p_1 \dots p_r) = r\,\frac{\log\log p_1 \dots p_r}{\log p_1 \dots p_r} \geq r\,\frac{\log\log n}{\log n} \text{ für } r \geq 3.$$

Wir können also beim Beweis annehmen

(99) $$r \geq 3;\ n = p_1 p_2 \dots p_r.$$

Es ist $p_{12} = 37 \geq 3\cdot 12 + 1$; aus $p_i \geq 3i+1$ folgt $p_{i+1} \geq p_i + 2 \geq 3i+3$, weil aber $3 | (3i+3)$, folgt auch $p_{i+1} \geq 3i+4 = 3(i+1)+1$.

Wir erhalten somit für $r \geq 12$

(100) $$p_1 \dots p_r \geq 2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 31 \prod_{i=12}^{r} (3i+1) > \frac{3^r\cdot r!}{55},$$

und für $r \geq 41$ gilt $p_1 \dots p_r > e^r \cdot r! = r^r \gamma_r \sqrt{r}$; d.h.

(101) für $r \geq 41$ folgt $\log p_1 p_2 \dots p_r > (r+0{,}5)\log r > r\log r$.

Dann ist aber

$$\frac{\log\log p_1 \dots p_r}{\log p_1 \dots p_r} < \frac{\log r + \log\log r}{r\log r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\log\log r}{\log r}.$$

(102) $$\text{Für } r \geq 41 \text{ ist } W(p_1 \dots p_r) < 1 + \frac{\log r \log r}{\log r} \leq 1 + \frac{\log\log 41}{\log 41} < 1{,}354.$$

Wir haben damit $\overline{\lim}\ W_n \leq 1$, und nach einigen numerischen Abschätzungen auch $\overline{\text{fin}}\ W_n = W(2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 23)$. Nun brauchen wir nur noch $\overline{\lim}\ W_n \geq 1$ zu beweisen.

Nach (94) und (95) ist für $x \geq 11$

(103) $$0{,}921292 < \pi(x)\,\frac{\log x}{x} < 1{,}25506.$$

Nun ist $\pi(p_r) = r$, also $0{,}921292 < r\,\frac{\log p_r}{p_r} < 1{,}25506$ für $r \geq 5$.

Wir haben $p_1 \ldots p_r < p_r{}^r$; $W(p_1 \ldots p_r) = r\,\frac{\log\log p_1 \ldots p_r}{\log p_1 \ldots p_r} >$
$r\,\frac{\log r + \log\log p_r}{r \log p_r} = \frac{\log r}{\log p_r} + \frac{\log\log p_r}{\log p_r}$; wegen

$p_r < \frac{1}{0{,}921}\, r \log p_r < 1{,}1\, r \log p_r$ ist $\log p_r < \log r + \log\log p_r + 0{,}1$; oder

(104) $$W(p_1 \ldots p_r) > 1 - \frac{0{,}1}{\log p_r}, \text{ also } \overline{\lim_{r\to\infty}}\ W \geq 1.$$

Hiermit ist Satz 4 bewiesen.

Wir wollen im letzten Teil dieser Arbeit noch einige Untersuchungen über $\binom{n}{k}$ durchführen. Als Problem stellt sich auch die Diskussion der Stirlingschen Zahlen 1. und 2. Art in dem in der Einleitung angegebenen Sinn. Die Frage nach $\omega\left(\binom{n}{k}\right)$ wurde in den letzten Jahren in einer Reihe von Arbeiten behandelt [5]; es wurden sehr schöne Ergebnisse erzielt, aber es gibt noch eine Anzahl offener Fragen.

Nach (102) gilt $v_r = W(p_1 p_2 \ldots p_r) < 1 + \frac{\log\log r}{\log r}$ für $r \geq 41$.

Auf der anderen Seite haben wir nach (103) ff.

$v_r > \frac{\log r + \log\log p_r}{\log p_r}$; wegen $\frac{r \log p_r}{p_r} = \eta_{p_r}$ ist nun

$\log r + \log\log p_r = \log p_r + \log \eta_{p_r}$, also

(105) $$v_r > 1 + \frac{\log \eta_{p_r}}{\log p_r}.$$

Wir beweisen nun

Satz 5. η_{p_r} *e.m.a.* $\Rightarrow v_r$ *e.m.a.* .

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem hinreichend großen r_1 ein ξ_1, so daß unter Beachtung von (42) $\eta_{p_{r_1}} > \eta_{p_{r_2}}$ für alle r_2 mit $\xi_1 \leq r_2$ gilt. Also haben wir nach den obigen Ungleichungen

(106) $v_{r_1} > 1 + \dfrac{\log \eta_{p_{r_1}}}{\log p_{r_1}}$; $v_{r_2} < 1 + \dfrac{\log\log r_2}{\log r_2}$,

somit $v_{r_1} > v_{r_2}$, wenn $\dfrac{\log \eta_{p_{r_1}}}{\log p_{r_1}} > \dfrac{\log\log r_2}{\log r_2}$ erfüllt ist.

Das ist aber bei vorgegebenem r_1 der Fall für **alle** hinreichend großen r_2. Wir beachten dabei, daß aus η_{p_r} e.m.a. auch $\eta_{p_r} > 1$ folgt für alle r von einer gewissen Stelle ab, da $\eta_{p_r} = 1$ höchstens einmal eintreten kann.

Wir beweisen jetzt einige einfache Abschätzungen der $\binom{n}{k}$.

Satz 6. *Die $\binom{n}{k}$ sind „logarithmisch konvex", d.h. für $n, k \in \mathbb{N}$; $1 \le k \le n$ gilt $\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}^2$.*

Beweis. Für k=1 haben wir $\binom{n}{0}\binom{n}{2} < n^2$; für k=n gilt $n \cdot 0 < 1$.

Sei also $2 \le k \le n-1$. Dann ist $\binom{n}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}^2$ gleichbedeutend mit $0 < n+1$.

Satz 7. *Es ist genau dann $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1} \le 2\binom{n}{k}$, wenn*

$\dfrac{n-\sqrt{n+2}}{2} \le k \le \dfrac{n+\sqrt{n+2}}{2}$ gilt.

Beweis. Wir haben zu untersuchen, wann $\dfrac{k}{n-k+1} + \dfrac{n-k}{k+1} \le 2$ gilt.

Das ist genau dann, wenn $|n-2k| \le \sqrt{n+2}$ erfüllt ist.

Eine Folgerung aus diesem Satz besagt: *Die $\binom{n}{k}$ sind „konkav", d.h.*

$\frac{1}{2}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}\right) \ge \binom{n}{k}$, wenn $1 \le k \le \dfrac{n-\sqrt{n+2}}{2}$ oder

$\dfrac{n+\sqrt{n+2}}{2} \le k \le n-1$ erfüllt ist.

Satz 8. *Es sei $c > 1$ eine reelle, von k unabhängige Zahl.*

Dann folgt, mit $h = \left[\dfrac{n+1}{c+1}\right]$, $2 \cdot \dfrac{1}{2^n}\left(1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{h}\right) < \dfrac{2c(c+1)}{(n+1)(c-1)^2}$.

Beweis. Es ist $c\binom{n}{k-1} \le \binom{n}{k}$ genau dann, wenn $k \le \dfrac{n+1}{c+1}$ gilt.

Damit folgt $1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{h} \le \binom{n}{h}\left(1 + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{c^2} + \ldots\right) = \binom{n}{h}\dfrac{c}{c-1}$.

Wir haben $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 1$, also

$$2\sum_{k=0}^{h} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} + \sum_{h<k<n-h} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 1;$$

$$\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{h}\binom{n}{k} = 1 - \frac{1}{2^n}\sum_{h<k<n-h}\binom{n}{k} \le 1 - \frac{\binom{n}{h}}{2^n}(n+1-2h-2);$$

weil $\binom{n}{h} > \frac{c-1}{c} \sum_{k=0}^{h} \binom{n}{k}$, erhalten wir

$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{h} \binom{n}{k} < 1 + \frac{c-1}{c} \frac{n-2h-1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{h} \binom{n}{k}$, was zu der Abschätzung in Satz 8 führt.

Folgerung aus Satz 8:

$$(107)\quad \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\varepsilon_n\right]} \binom{n}{k} \to 0 \text{ für } n \to \infty, \text{ wenn } \varepsilon_n \sqrt{n} \to \infty \text{ erfüllt ist.}$$

Wir beweisen nun

Satz 9. *Für* $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ *gilt*

$$\binom{n}{k} \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot e^{\left(1-\frac{1,5}{n}\right)\frac{(n-2k)^2}{2n}} \leq c_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Satz 10. *Für alle hinreichend großen n gilt bei vorgegebenem* $\varepsilon > 0$ *und* $\frac{n}{2} - \sqrt{n}\log n \leq k \leq \frac{n}{2}$ *die Ungleichung*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \varepsilon < c_{\left[\frac{k}{2}\right]} \leq \binom{n}{k} \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n} \frac{(n-2k)^2}{2n}}.$$

Aus den Sätzen 8 bis 10 ergibt sich unmittelbar das bekannte Resultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweise. Wir bezeichnen zur Abkürzung $\omega\left(\binom{n}{k}\right) = \omega_k$ und mit q_i die Primteiler von $\binom{n}{k}$. Dann gilt, mit positiven ganzen α_i

$$(108)\quad \prod_{i=1}^{\omega_k} q_i^{\alpha_i} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\gamma_n}{\gamma_k\,\gamma_{n-k}} \frac{n^{n+0,5}}{k^{k+0,5} \cdot (n-k)^{n-k+0,5}}$$

und

$$(108')\quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\left[\frac{n}{q_i^j}\right] - \left[\frac{n-k}{q_i^j}\right] - \left[\frac{k}{q_i^j}\right]\right); \quad m_i = \left[\frac{\log n}{\log q_i}\right].$$

Da leicht einzusehen ist, daß

$0 \leq \left[\frac{n}{q_i^j}\right] - \left[\frac{n-k}{q_i^j}\right] - \left[\frac{k}{q_i^j}\right] \leq 1$ gelten muß, folgt auch

$$(108'')\quad q_i^{\alpha_i} \leq n.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ annehmen. Um $\frac{\gamma_n}{\gamma_k \gamma_{n-k}}$ gut abschätzen zu können, machen wir eine Zwischenüberlegung. Für positives reelles x sei

(109) $(1+\frac{1}{x})^{x+\delta_x} = e.$

Dann ist $\delta_x = \frac{1}{\log(1+\frac{1}{x})} - x; \quad \frac{d\delta_x}{dx} = \frac{1}{x(x+1)} \frac{1}{(\log(1+\frac{1}{x}))^2} - 1.$

Wie man leicht mit Hilfe der Exponentialreihe zeigen kann, gilt

(110) $(1+\frac{1}{x})^{\sqrt{x(x+1)}} < e < (1+\frac{1}{x})^{x+0,5}.$

Hieraus ergibt sich $\sqrt{x(x+1)} \cdot \log(1+\frac{1}{x}) < 1$, somit $\frac{d\delta_x}{dx} > 0.$

(111) δ_x ist monoton wachsend; $0 < \delta_x < 0,5$;

$\delta_1 = \frac{1}{\log 2} - 1 > 0,44266.$

Wir beweisen jetzt

(112) $c_{\left[\frac{k}{2}\right]} \leq \frac{\gamma_n \sqrt{2}}{\gamma_k \gamma_{n-k}} \leq c_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$

Denn nach (6) ist $\frac{\gamma_k}{\gamma_{k+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{k})^{k+0,5}}$; nach (109) folgt

$\frac{\gamma_k}{\gamma_{k+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^{0,5-\delta_k}}$; hieraus erhalten wir:

(113) Seien k,m natürliche Zahlen, $k < m$. Dann folgt mit (6), (109) und (111) sogleich $\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} < \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m}$.

Wir haben jetzt für gerades n

$$\frac{\gamma_n \sqrt{2}}{\gamma_k \gamma_{n-k}} = c_{\frac{n}{2}} \frac{\gamma_{\frac{n}{2}}^2}{\gamma_k \gamma_{n-k}} = c_{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-k} \left(\frac{\gamma_{k+j}}{\gamma_{k+j-1}} \frac{\gamma_{\frac{n}{2}+j-1}}{\gamma_{\frac{n}{2}+j}} \right) \leq c_{\frac{n}{2}},$$

und für gerades n

$$\frac{\gamma_n \sqrt{2}}{\gamma_k \gamma_{n-k}} < \frac{\gamma_{n+1} \sqrt{2}}{\gamma_k \gamma_{n+1-k}} \leq c_{\frac{n+1}{2}} \text{ wegen } \frac{\gamma_{n-k+1}}{\gamma_{n-k}} < \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}.$$

Somit haben wir die rechte Ungleichung von (112) bewiesen.

Für gerades k wird

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_k\,\gamma_{n-k}} \geq \frac{\gamma_k}{\gamma_{\frac{k}{2}}\,\gamma_{\frac{k}{2}}},\ \text{da}\ \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-k}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\gamma_{n-k+j}}{\gamma_{n-k+j-1}} > \left(\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \frac{\gamma_{\frac{k}{2}+j}}{\gamma_{\frac{k}{2}+j-1}}\right)^2 \text{ erfüllt ist.}$$

Also haben wir

$$(114)\qquad \frac{\gamma_n\sqrt{2}}{\gamma_k\,\gamma_{n-k}} > \frac{\gamma_k\sqrt{2}}{\gamma_{\frac{k}{2}}^{\,2}} = c_{\frac{k}{2}}\ (\text{k gerade});$$

für ungerades k wird wegen $\frac{\gamma_{n+1-k}}{\gamma_{n-k}} > \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$

$$(115)\qquad \frac{\gamma_n\sqrt{2}}{\gamma_k\,\gamma_{n-k}} > \frac{\gamma_n\sqrt{2}}{\gamma_{k-1}\,\gamma_{n+1-k}} > c_{\frac{k-1}{2}}.$$

Damit ist (112) vollständig bewiesen. Somit ergibt sich aus (108) und (112)

$$(116)\qquad c_{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}}{k^{k+0,5}\,(n-k)^{n-k+0,5}} < \binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2^n} < c_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}}{k^{k+0,5}\,(n-k)^{n-k+0,5}}.$$

Zum Beweise der Sätze 9 und 10 haben wir zu zeigen:

$$(117)\qquad e^{-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n}\cdot\frac{(n-2k)^2}{2n}} \leq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}}{k^{k+0,5}\,(n-k)^{n-k+0,5}} \leq e^{-(1-\frac{1,5}{n})\frac{(n-2k)^2}{2n}}$$

oder

$$(117')\qquad -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n}\,\frac{(n-2k)^2}{2n} \leq (n+1)\log\frac{n}{2} - (k+0,5)\log k - (n-k+0,5)\log(n-k)$$

$$\leq -(1-\frac{1,5}{n}\,\frac{(n-2k)^2}{2n}.$$

Für $k = \frac{n}{2}$ ergibt sich

$$0 \leq (n+1)\log\frac{n}{2} - (\frac{n}{2}+0,5+\frac{n}{2}+0,5)\log\frac{n}{2} \leq 0,$$

also die Richtigkeit von (117'). Wir fassen nun $k = x$ als reelle stetige Veränderliche auf und wollen zeigen, daß

(118) a) für $1 \leq x \leq \frac{n}{2}$ die Ungleichung

$$f_1(x) = \frac{1}{2n}\,(1-\frac{1,5}{n})\,(n-2x)^2 + (n+1)\log\frac{n}{2} - (x+0,5)\log x - (n+0,5-x)\cdot\log(n-x) \leq 0$$

b) für $\frac{n}{2} - \sqrt{n}\log n \leq x < \frac{n}{2}$ die Ungleichung

$$f_2(x) = \frac{1}{2n}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n}\,(n-2x)^2 + (n+1)\log\frac{n}{2} - (x+0,5)\log x - (n+0,5-x)\log(n-x) \geq 0$$

erfüllt sind. Da für $x = \frac{n}{2}$ diese Ungleichungen richtig sind, zeigen wir

(119) $\frac{df_1}{dx} \geq 0$ und $\frac{df_2}{dx} \leq 0.$

Diese Ungleichungen sind gleichbedeutend mit

(120) a) $\log \frac{n-x}{x} \geq \frac{1}{n}\,(2-\frac{3}{n})\,(n-2x)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(n-x)};\ 1 \leq x < \frac{n}{2};$

b) $\log \frac{n-x}{x} \leq \frac{2}{n}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n}\,(n-2x)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(n-x)};\ \frac{n}{2}-\sqrt{n}\log n \leq x < \frac{n}{2}.$

Es ist

(121) $$\frac{2(n-2x)}{n} = \frac{1}{\frac{x}{n-2x}+\frac{1}{2}} < \log \frac{n-x}{x} = \log\,(1+\frac{n-2x}{x}) <$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n-2x}\,(\frac{x}{n-2x}+1)}} = \frac{n-2x}{\sqrt{x(n-x)}};\ \frac{1}{2x}-\frac{1}{2(n-x)} = \frac{n-2x}{2x(n-x)}.$$

Wir können statt (120) die Ungleichungen

(122) $$\frac{2}{n} \geq \frac{1}{n}\,(2-\frac{3}{n})+\frac{1}{2x(n-x)};\ \frac{1}{\sqrt{x(n-x)}} \leq \frac{2}{n}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\log n}+\frac{1}{2x(n-x)}$$

untersuchen. Die erste führt zu

$\frac{3}{n^2} \geq \frac{1}{2x(n-x)};\ x(n-x) \geq \frac{n^2}{6}$, sie ist erfüllt für

$\frac{n}{2} \geq x \geq \frac{n}{2}\,(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$. Für „kleine" x schließen wir so:

Sei $1 \leq x \leq \frac{n}{14}$. Dann ist $\frac{n}{x}-1 \geq 13,\ \log \frac{n-x}{x} \geq \log 13 > 2{,}5.$

Nach (120) a) ist aber

$$\frac{1}{n}\,(2-\frac{3}{n})\,(n-2x)+\frac{n-2x}{2x(n-x)} = (n-2x)\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{2x(n-x)}\right) < 2{,}5.$$

Wir können

(123) $$\frac{n}{14} < x < \frac{n}{2}\,(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0{,}2115\,n$$

voraussetzen. Es folgt $n-2x < \frac{6n}{7}$; die linke Seite von (120) a) ist kleiner als $\frac{12}{7}+\frac{6n}{7}\,(-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{\frac{1}{7}\frac{13}{14}n^2}) = \frac{12}{7}+\frac{354}{91n}$. Für

$1 \leq x \leq \frac{n}{10}$ erhalten wir $\log 9 > 2{,}197 > \frac{12}{7}+\frac{354}{910}$. Es bleibt

(124) $$\frac{n}{10} < x;\ n-2x < \frac{8n}{10};\ \frac{8}{5}+\frac{4n}{5}\,(-\frac{3}{n^2}+\frac{50}{9n^2}) = 1{,}6+\frac{92}{45n}.$$

Für $1 \leq x \leq \frac{n}{9}$ wird $\log 8 > 2{,}079 > 1{,}6 + \frac{92}{360}$.

(125) $\frac{n}{9} < x;\ n-2x < \frac{7}{9}n;\ \frac{14}{9} + \frac{7}{9n}\,(-3 + \frac{81}{16}) = \frac{14}{9} + \frac{33 \cdot 7}{9 \cdot 16n}$

Für $1 \leq x \leq \frac{n}{8}$ wird $\log 7 > 1{,}945 > \frac{14}{9} + \frac{77}{48 \cdot 8}$.

(126) $\frac{n}{8} < x;\ n-2x < \frac{3}{4}n;\ \frac{3}{2} + \frac{3}{4n}\,(-3 + \frac{32}{7}) = 1{,}5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7n}$.

Für $1 \leq x \leq \frac{n}{7}$ wird $\log 6 > 1{,}791 > 1{,}5 + \frac{33}{28 \cdot 7}$.

(127) $\frac{n}{7} < x;\ n-2x < \frac{5}{7}n;\ \frac{10}{7} + \frac{5}{7n}\,(-3 + \frac{49}{12}) = \frac{10}{7} + \frac{5}{7n} \cdot \frac{13}{12}$

$1 \leq x \leq \frac{n}{6};\ \log 5 > 1{,}609 > \frac{10}{7} + \frac{65}{72 \cdot 7}$.

(128) $\frac{n}{6} < x;\ n-2x < \frac{2}{3}n;\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3n}\,(-3 + \frac{18}{5}) = \frac{4}{3} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5n} = \frac{4}{3} + \frac{2}{5n};$

$1 \leq x \leq \frac{2n}{11};\ \log 4{,}5 > 1{,}5 = \frac{4}{3} + \frac{5}{30}$.

(129) $\frac{2}{11}n < x;\ n-2x < \frac{7}{11}n;\ \frac{14}{11} + \frac{7}{11n}\,(-3 + \frac{121}{36}) = \frac{14}{11} + \frac{7 \cdot 13}{11 \cdot 36n}$

$1 \leq x \leq \frac{n}{5};\ \log 4 > 1{,}386 > \frac{7}{11}\,(2 + \frac{13}{36 \cdot 5})$.

(130) $\frac{n}{5} < x < 0{,}2115n;\ n-2x \leq \frac{3}{5}n;\ 1{,}2 + \frac{3}{5n}\,(-3 + \frac{25}{8}) = 1{,}2 + \frac{3}{40n}$

$< 1{,}2 + \frac{3}{200} = 1{,}215;\ \frac{n}{x} - 1 > \frac{1}{0{,}2115} - 1 = \frac{8775}{2115} > 3{,}7;\ \log 3{,}7 > 1{,}215.$

Hiermit ist (120) a) bewiesen.

Wir beweisen nun die zweite Ungleichung von (122). Schreiben wir

(131) $$\frac{1}{\sqrt{x(n-x)}} = t,$$

dann müssen wir zeigen:

(132) $$t - \frac{1}{2}\,t^2 \leq \frac{2}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \log n)} \text{ für}$$

$$\frac{2}{n} < t \leq \frac{1}{\sqrt{(\frac{n}{2} - \sqrt{n}\log n)\,(\frac{n}{2} + \sqrt{n}\log n)}}.$$

Es ist $\frac{d}{dt}\,(t - \frac{t^2}{2}) = 1 - t \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2}} > 0$, wenn

$\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2 > 1;\ \frac{n^2}{4}\left(1 - \frac{4\,(\log n)^2}{n}\right) > 1;\ \frac{n^2}{4}\left(1 - 16\,(\frac{\log \sqrt{n}}{\sqrt{n}})^2\right) > 1$

gilt. Für $n > 75$ ist $\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2 > 6$. Nun folgt

(133) Für $n \geq 169$ gilt $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2}}\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2}}\right)$

$\leq \dfrac{2}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \log n)}$ oder $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{n}{4} - (\log n)^2}}\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{n^2}{4} - n\,(\log n)^2}}\right) \leq \dfrac{2}{\sqrt{n} - \log n}$

oder $(\sqrt{n} - \log n)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n - 4\,(\log n)^2}}\right) \leq \sqrt{n - 4\,(\log n)^2}$.

Diese Ungleichung ist aber erfüllt, weil

$(\sqrt{n} - \log n)^2 = n - 2\sqrt{n}\,\log n + (\log n)^2 < n - 4\,(\log n)^2$;

$5\,(\log n)^2 < 2\sqrt{n}\,\log n$; $2{,}5\,\log n < \sqrt{n}$; $\dfrac{\sqrt{n}}{2\log\sqrt{n}} \geq \dfrac{13}{2\log 13} > 2{,}5$ gilt.

Somit haben wir das Teilergebnis

(134) Für $n \geq 169$, $\frac{n}{2} - \sqrt{n}\,\log n \leq k \leq \frac{n}{2}$ gilt

$$c_{\left[\frac{k}{2}\right]} \leq \binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n}\, e^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \log n}\frac{(n-2k)^2}{2n}}.$$

Es sind hiermit Satz 9 und Satz 10 vollständig bewiesen.

Wir ziehen noch eine Folgerung: Wir sehen, daß

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \log n}\,\frac{(n-2k)^2}{2n} = \left(1 + \frac{\log n}{\sqrt{n} - \log n}\right)\frac{(n-2k)^2}{2n} = \frac{(n-2k)^2}{2n} + \frac{\log n}{\sqrt{n} - \log n}\,\frac{(n-2k)^2}{2n}$$

und wegen $n - 2\sqrt{n}\,\log n \leq 2k \leq n$, $n - 2k \leq 2\sqrt{n}\,\log n$ auch

$$\frac{\log n}{\sqrt{n} - \log n}\,\frac{(n-2k)^2}{2n} \leq \frac{8}{\frac{\sqrt{n}}{(\log\sqrt{n})^3} - \frac{2}{(\log\sqrt{n})^2}} < \varepsilon$$

für jedes positive ε und alle hinreichend großen n gilt.

Schlußbemerkung: Mit den gleichen Methoden können wir auch zeigen:

(135) *Für $n \geq 164$; $1 \leq k \leq 0{,}4\,n$ gilt*

$$\binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n}\, e^{\frac{(n-2k)^2}{2n}} < c_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

In Satz 1 wurde die Gleichung (21) nur zum Teil ausgenutzt; genauere, verfeinerte Abschätzungen könnten zu weiteren Ergebnissen führen. Satz 3 zeigt, daß eine genauere Untersuchung der Primteiler, welche **nicht** Teiler von a_k bzw. b_k sind, zu Verschärfungen führen könnte. Ähnlich wie bei $\omega\left(\binom{2k}{k}\right)$ können auch für $\omega\left(\binom{n}{k}\right)$ Schranken hergeleitet werden.

Literatur

[1] J. Wallis: Arithmetica infinitorum, Oxford 1656. Vgl. auch K. Knopp: Theorie u. Anwend. d. unendl. Reihen, 3. Aufl., J. Springer, Berlin 1931, S. 397.

[2] Vgl. z. B. E. Trost: Primzahlen, Basel/Stuttgart 1953 oder R. Mönkemeyer: Einführung in d. Zahlenth., 2. Aufl., Ferdinand Schöningh, Paderborn 1971.

[3] J. B. Rosser, L. Schoenfeld: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math. **6**, 64–94 (1962).

[4] Harborth, Kanold, Kemnitz: Abschätzungen der Primzahlfunktion mit elementaren Methoden, El. d. Math. **36**, 167–170 (1981).

[5] z. B. P. A. B. Pleasants: The number of prime factors of binomial coefficients. J. Number Theory **15**, No. 2, 203–225 (1982). P. Erdös: Über die Anzahl der Primfaktoren von $\binom{n}{k}$, Arch. Math. **24** (1973), 53–56.